* $g(x) \geq \frac{3}{2} - x$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{3}{2} - x\right) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

D'où : g est continue et strictement décroissante sur IR ;

d'où : $g(IR) =]\lim\limits_{x \to +\infty} g , \lim\limits_{x \to -\infty} g\ [=]-\infty , +\infty\ [$

$g(IR) = IR$

d) $0 \in g(IR)$ d'où il existe un réel a tel que $g(a) = 0$

comme g est strictement décroissante alors a est unique.

Par suite il existe un unique réel a tel que $f(a) = a$

$g(\frac{2\pi}{3}).g(\frac{5\pi}{6}) < 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < a < \frac{5\pi}{6}$

3) $\begin{cases} U_0 \quad donné \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) f est dérivable sur IR et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$|f(U_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |U_n - a|$ d'où : $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |U_n - a|$

b) démonstration par récurrence :

* $|U_0 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - a|$ (vraie)

* supposons que : $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$

et montrons que : $|U_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

on a : $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$ et $|U_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |U_n - a|$

d'où : $|U_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

<u>conclusion :</u>

$|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$ pour tout $n \in IN$

c) $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a|$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - a| = 0$; d'où :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - a) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a.$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn